数理解析研究所講究録
485巻 1983年 170-186

弾性体の振動の境界可制御性について

広島大 総合科 成川公昭 (Kimiaki Narukawa)

1、序

制御問題において可制御性は最も基本的な概念の一つであるが、よく知られている様に、分布定数システムに対しては、approximate controllability と exact controllability の二つの概念がある。ここで、exact controllability とは、到達可能集合を explicit にはっきりと決定することであり、approximate controllability は、到達可能集合はわからないが、その閉包を求めることと考えられる。工学的に見れば、任意の小さな誤差内に制御可能という意味で、一見、approximate controllability で十分である様に思われる。しかし、以下の問題を考える時、どうしても exact controllability まで得ることが必要になってくる。

即ち、

(i) 制御 f で状態 u_0 が u_1 に制御されたとし、更に、u_0 は $\tilde{u}_1$ に制御可能であるとする。このとき、もし、u_1 と $\tilde{u}_1$

が十分近くにあるならば、f の近くに u_0 を $\tilde{u}_1$ に移す制御 $\tilde{f}$ が存在するか？

(ii) 制御空間に何らかの形で制限が入った場合、その制限集合の中で如何なる状態が可制御であるか？

問題(i)については、少しの状態変化に対し変化した状態に到達させるには、制御の方もやはり少しだけ変化させればよい、という意味で自然な設問と思われる。又、入力の大きさには自ずと制限が入るし、更に、システムに応じていろいろな形の制限が入ることは当然である。従って、問題(ii)は工学においては常に起こる問題である。

一方、approximate controllability が、その随伴システムの可観測性を示すことによって得られるのに対し、exact controllability を得るためには何らかの意味で具体的に制御を構成しなくてはならない。従って、exact controllability の問題は approximate controllability の場合ほど簡単ではなく、制御系を包括的に扱うことは難しく、具体的な個々の場合を研究し、それぞれの制御系の特性を利用しなければならない。そこで、ここでは弾性体の振動を境界で制御する問題を考え、その exact controllability を得、問題(ii)について考える。

2. 弾性体の振動に対する制御問題

Ωをなめらかな境界SをもつR^nの有界領域とし、平衡状態がΩを占める弾性体を考える。平衡時、位置xにある点が時刻tにおいてxよりのズレを $u(t,x)=\{u_i(t,x)\}_{1\le i\le n}$ とすると、弾性体の振動は次の式で与えられる。

(A) 等方弾性体：

$$
(1)\begin{cases} u_{tt}-Au=g & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ B_\Gamma u=f & \text{on } S\times(0,\infty) \end{cases}
$$

(B) 熱弾性体：

$$
(2)\begin{cases} u_{tt}-Au+\alpha\,\mathrm{grad}\,\theta=g & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ \theta_t+\beta\,\mathrm{div}\,u_t-\kappa\Delta\theta=q & \\ B_\Gamma u=f\ ,\quad \theta=0 & \text{on } S\times(0,\infty) \end{cases}
$$

ここで、

$$
Au=\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u\ ,
$$

$$
B_\Gamma u=\Big\{\lambda\nu_i\,\mathrm{div}\,u+\mu\sum_{j=1}^{n}\nu_j\,(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)\Big\}_{1\le i\le n}+\Gamma u,
$$

$\nu=\{\nu_i\}_{1\le i\le n}$ はS上の単位外法線、λ、μ は $\mu>0$、$\lambda+\frac{2}{n}\mu>0$ をみたす定数、α、β、κ は正定数、$\Gamma\equiv\Gamma(x)$ は境界上なめらかな対称、非負の $n\times n$ 行列関数である。

方程式(1)は温度が振動に及ぼす影響を無視した式であり、(2)はその影響をも考慮に入れた式である。式中 $\theta(x,t)$ は、時刻t，位置xの温度と、平衡時の一様温度分布の差を表わす。

以下、境界に加える力 $f(x,t)$ を制御と思い、その振動に対する exact controllability 及び、許容可制御性（即ち、問題(ii)）について考える。

以後、実数 r に対し、$H^r(\Omega)$、$H^r(S)$ はそれぞれ、Ω、S 上の普通のソボレフ空間とし、$\mathbb{H}^r(\Omega)=[H^r(\Omega)]^n$, $\mathbb{H}^r(S)=[H^r(S)]^n$（$n$ ケの直積）とする。更に、ヒルベルト空間 X に対し、$\mathcal{E}_t^k(0,T;X)$ は t 変数、X 値関数として t について $[0,T]$ 上 k 回連続的微分可能な関数から成る空間とする。

3. Exact controllability について.

制御系 (1) について次の結果が得られる。

定理 1. m を 2 以上の整数、$g(t)\in\bigcap_{j=0}^{m-1}\mathcal{E}_t^j(0,\infty;\mathbb{H}^{m-j-1}(\Omega))$ とする。このとき $T_0>0$ が存在し、$\mathbb{H}^m(\Omega)\times\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)$ は、$\bigcap_{j=0}^{m-2}\mathcal{E}_t^j(0,T_0;\mathbb{H}^{m-j-3/2}(S))$ で、exactly controllable である。

即ち、任意の $[u_0,v_0]$, $[u_1,v_1]\in\mathbb{H}^m(\Omega)\times\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)$ に対し境界制御 $f(t)\in\bigcap_{j=0}^{m-2}\mathcal{E}_t^j(0,T_0;\mathbb{H}^{m-j-3/2}(S))$ が存在し、この $f(t)$ に対し、$[u(0),u_t(0)]=[u_0,v_0]$、$[u(T_0),u_t(T_0)]=[u_1,v_1]$ をみたす (1) の解 $u(t)$ が $\bigcap_{j=0}^{m}\mathcal{E}_t^j(0,T_0;\mathbb{H}^{m-j}(\Omega))$ の中に存在する。

この定理の証明には次の補題が用いられる。

補題．　mを非負整数とし、Bを$\Omega\cup S$を含む$\mathbb{R}^n$の有界開集合とする。このとき次の (i) ～ (iv) をみたす有界作用素 E_m、F_m ; $H^m(\Omega)\to H^m(\mathbb{R}^n)$ が存在する。
任意の $u\in H^m(\Omega)$ に対し、

(i) $E_m u + F_m u = u \quad \text{in } \Omega$;

(ii) $\operatorname{div} E_m u = 0$;

(iii) $\varphi\in H^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ が存在し、$F_m u = \operatorname{grad}\varphi$ をみたす;

(iv) $\operatorname{supp}(E_m u)\cup\operatorname{supp}(F_m u)\subset B$。

定理1の証明の概略。　まず空間$H^m(\mathbb{R}^n)$を2つの閉部分集合 $X^m\equiv\{u\in H^m(\mathbb{R}^n)\mid \operatorname{div} u=0 \text{ in } \Omega,\ u\cdot\nu=0 \text{ on } S\}$ と $Y^m\equiv\{\operatorname{grad}\varphi\in H^m(\mathbb{R}^n)\mid \varphi\in H^{m+1}(\mathbb{R}^n)\}$ の直和に分解する。次に $[u_0, v_0]\in H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ に対し、初期値 $[E_m u_0, E_{m-1}v_0]$ と $[F_m u_0, F_{m-1}v_0]$ で方程式 $u_{tt}-Au=0$ を$\mathbb{R}^n$で考えると、その解はそれぞれ、X^m, Y^m の中に留まり、それぞれの空間の中では波動方程式となる。即ち、これは弾性波を縦波と横波にわけたことになっている。その解をΩに制限したものを考えると、feedback stabilizability が得られ、あとは Russell の方法により、exact controllability を得る。

定理1の詳しい証明と補題の証明は [1] を見て欲しい。更に、定理1の証明より次のことがわかる。

系. mを2以上の整数、$g(t)\equiv 0$とする。このとき、有界線型作用素 K_Γ ; $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)\to\bigcap_{j=0}^{m-2}\mathcal{E}_t^j(0,T_0;H^{m-j-3/2}(S))$ と L_Γ ; $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)\to\bigcap_{j=0}^{m}\mathcal{E}_t^j(0,T_0;H^{m-j}(\Omega))$ が存在し、任意の $[u_1,v_1]\in H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ に対し、$f(t)=K_\Gamma[u_1,v_1](t)$ は制御系(1)において、$[0,0]$ を $[u_1,v_1]$ に移す制御であり、$u(t)=L_\Gamma[u_1,v_1](t)$ はその時の解となる。

次に制御系(2)について考える。制御系(2)において、"(温度を考慮に入れず)振動を制御する" とは以下の問題と思うことができる。

即ち、

「与えられた初期値 $[u_0,v_0,\theta_0]$ と振動の最終値 $[u_1,v_1]$ に対し、制御 $f(t)$ をうまくとれば、$[u(0),u_t(0),\theta(0)]=[u_0,v_0,\theta_0]$, $[u(T),u_t(T)]=[u_1,v_1]$ をみたす(2)の解 $[u(t),\theta(t)]$ が存在するか？」

ここで、初期値 $[u_0,v_0,\theta_0]$ を $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)\times H^m(\Omega)$、最終値 $[u_1,v_1]$ を $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ の中にとるのに応じて、自然に制御 $f(t)$ は $\bigcap_{j=0}^{m-2}\mathcal{E}_t^j(0,T;H^{m-j-3/2}(S))$ $(\equiv\mathcal{F}_N^m[0,T])$、軌道

$[u(t), \theta(t)]$ は $\bigcap_{j=0}^{m} \mathcal{E}_t^j(0,T;H^{m-j}(\Omega)) \times [\bigcap_{j=0}^{m-2} \mathcal{E}_t^j(0,T;H^{m-j}(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^{m-1}(0,T;L^2(\Omega))]$ $(\equiv \mathcal{E}_m[0,T])$ に入ることを要請する。この時制御系(1)と異なり注意しなければならない事は、θ に対する適合条件に制御 f が関与していないという事である。即ち、初期値 $[u_0, v_0, \theta_0]$ はどこかに制御される為には、適合条件

(C) $\theta_j \in H^{m-j}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $0 \le j \le m-2$, $\theta_{m-1} \in L^2(\Omega)$

をみたさねばならない。ここで、

$$\theta_j = -\beta \operatorname{div} u_j + \kappa \Delta \theta_{j-1} + g^{(j-1)}(0), \quad 1 \le j \le m-1,$$

$$u_1 = v_0, \quad u_j = A u_{j-2} - \alpha \operatorname{grad} \theta_{j-2} + g^{(j-2)}(0), \quad 2 \le j \le m-1$$

である。そこで

$$\mathbb{W}_{g,f}^m(\Omega) = \left\{ [u_0, v_0, \theta_0] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} [u_0, v_0, \theta_0] \text{ は} \\ \text{条件 (C) をみたす} \end{array} \right\}$$

とおく。又、

$$\omega_m(\alpha, \beta, \kappa) = \begin{cases} (\alpha\beta/\kappa)(1 + \kappa^{-(m-1)}), & m = 2, 3, \\ (\alpha\beta/\kappa)(1 + \kappa^{-2(m-1)}), & m \ge 4 \end{cases}$$

とおくと、次の制御系(2)に対する結果が得られる。

定理 2. m は 2 以上の整数、$g(t) \in \bigcap_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_t^j(0,\infty;H^{m-1-j}(\Omega))$、$f(t) \in \bigcap_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_t^j(0,\infty;H^{m-1-j}(\Omega))$ とする。このとき、λ、μ、Ω にのみ依存する正定数 d_m が存在し、もし $\omega_m(\alpha, \beta, \kappa) \le d_m$ ならば、制御系(2)に対し $\mathbb{W}_{g,f}^m(\Omega)$ は $H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$ に時刻 T_0 で、$\mathcal{F}_N^m[0, T_0]$ の中で、*exactly controllable* である。

即ち、任意の $[u_0, v_0, \theta_0] \in \mathbb{W}^m_{g,q}(\Omega)$、$[u_1, v_1] \in \mathbb{H}^m(\Omega)\times\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)$ に対し、制御 $f(t) \in \mathfrak{F}^m_N[0,T_0]$ が存在し、この $f(t)$ に対し、$[u(0), u_t(0), \theta(0)] = [u_0, v_0, \theta_0]$、$[u(T_0), u_t(T_0)] = [u_1, v_1]$ をみたす(2)の解 $[u(t), \theta(t)]$ が $\mathcal{E}_m[0,T_0]$ の中に存在する。

ここで T_0 は定理1中の T_0 である。

証明の概略。 まず(2)の代りに方程式

$$(3.1)\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - A\tilde{u} + \alpha\, \mathrm{grad}\, E\theta = Eg & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T_0) \\ \theta_t + \beta R\, \mathrm{div}\, \tilde{u}_t - \kappa\Delta\theta = q & \text{in } \Omega\times(0,T_0) \end{cases}$$

を境界条件 $\theta = 0$ on $S\times(0,T_0)$、初期値 $[\tilde{u}(0), \tilde{u}_t(0), \theta(0)] = [Eu_0, Ev_0, \theta_0]$ の下で考える。 ここで、E は $H^k(\Omega)$ から $H^k(\mathbb{R}^n)$ $(0 \le k \le m)$ への有界拡張作用素で、R は Ω 上への限定作用素である。 $[u_0, v_0, \theta_0]$ が適合条件 (C) をみたすということより、(3.1) の解が存在し、その Ω への制限は $\mathcal{E}_m[0,T_0]$ に属することがわかる。従って $g = 0$、$q = 0$、$[u_0, v_0, \theta_0] = [0,0,0]$ の時に定理を証明すれば十分である。

そこで、任意の $[u_1, v_1] \in \mathbb{H}^m(\Omega)\times\mathbb{H}^{m-1}(\Omega)$ に対し、$v(t) = L_\Gamma[u_1, v_1](t)$ とおくと、

$$(3.2)\begin{cases} w_{tt} - Aw + \alpha\, \mathrm{grad}\, \theta = 0 & \\ \theta_t + \beta\, \mathrm{div}\, w_t - \kappa\Delta\theta = -\beta\, \mathrm{div}\, v_t & \text{in } \Omega\times(0,T_0) \\ B_\Gamma w = 0, \quad \theta = 0 & \text{on } S\times(0,T_0) \end{cases}$$

$$\Big\lfloor\ [w(0), w_t(0), \theta(0)] = [0, 0, 0]$$

の解 $[w(t), \theta(t)]$ が $\mathcal{E}_m[0, T_0]$ に存在することが証明され、更に、任意の $\delta > 0$ に対し Energy 不等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{ \|w^{(k+1)}(t)\|^2 + a\,(w^{(k)}(t), w^{(k)}(t)) + (\alpha/\beta)\,\|\theta^{(k)}(t)\|^2 \\
(3.3)\qquad &+ \int_S \Gamma w^{(k)}(t)\cdot w^{(k)}(t)\,dS \Big\} + (\kappa\alpha/\beta - \delta)\int_0^t \|\operatorname{grad}\theta^{(k)}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\leqq (\alpha^2/4\delta)\int_0^t \|v^{(k+1)}(\tau)\|^2 d\tau \quad ,
\end{aligned}
$$

$0 \leqq t \leqq T_0$, $0 \leqq k \leqq m-1$ が得られる。 ここで、

$$a(u, v) = \lambda\int \operatorname{div} u \operatorname{div} v\,dx + \mu\sum_{i,j=1}^{n}\int \left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx$$

である。 更にこの Energy 不等式 (3.3) より

$$
\begin{aligned}
&\|w(T_0)\|_m^2 + \|w_t(T_0)\|_{m-1}^2 + (\alpha/\beta)\,\|\theta(T_0)\|_m^2 \\
(3.4)\qquad &\leqq C_m\,\omega_m(\alpha, \beta, \kappa)\,T_0\,|||L_\Gamma|||^2\ \|[u_1, v_1]\|_{(m, m-1)}^2
\end{aligned}
$$

を得る。ここで $\|\cdot\|_k$, $k = m, m-1$, $\|\cdot\|_{(m, m-1)}$ はそれぞれ、$H^k(\Omega)$ (又は $H^k(\Omega)$), $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ のノルムであり、C_m は λ、μ, Ω にのみ依存する定数である。 $u(t) = v(t) + w(t)$ とおくと、$[u(t), \theta(t)]$ は (2) の $g = 0$、$q = 0$、$f = K_\Gamma[u_1 v_1]$ に対する解であり、更に $\mathcal{E}_m[0, T_0]$ に属する。 又、$[u(T_0), u_t(T_0)] = [v(T_0), v_t(T_0)] + [w(T_0), w_t(T_0)]$ だから制御 $f = K_\Gamma[u_1, v_1]$ によって $[0, 0, 0]$ は $[u_1, v_1] + [w(T_0), w_t(T_0)]$ に移されるわけである。今 R を $[u_1, v_1]$ を $[w(T_0), w_t(T_0)]$ に移す作用素とすると、明らかに R は線型であり、(3.4) より $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ 上の有界作用素となり、その作用素ノルムは

(3.5) $\quad |||R|||^2 \leqq C_m \omega_m(\alpha,\beta,K) T_0 |||L_\Gamma|||^2$

と評価されることがわかる。$[0,0,0]$ は任意の $[u_1, v_1] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$ に対し $(I+R)[u_1, v_1]$ に移されることがわかったから、もし、$|||R||| < 1$ ならば $I+R$ は onto となり、$H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)$ が exactly controllable であることがわかる。従って (3.5) より、

$$\omega_m(\alpha,\beta,K) \leqq \frac{1}{2C_m T_0 |||L_\Gamma|||} \qquad (\equiv d_m)$$

であれば exactly controllable であるが、T_0, $|||L_\Gamma|||$, C_m はいずれも λ, μ, Ω にのみ依存することに注意すれば結論を得る。

4. 制御空間の制限と許容可制御性

ここでは次の様な制御の制限集合を考えることにする。

G を $\mathbb{L}^2(S)$ の部分集合とし、この G に対し制御の制限集合 $\mathcal{F}_N^m(G)$ を

$$\mathcal{F}_N^m(G) \equiv \left\{ f(t) \in \bigcap_{j=0}^{m-2} \mathcal{E}_t^j(0,\infty; \mathbb{H}^{m-j-3/2}(S)) \,\middle|\, f(t) \in G \text{ for all } t \geqq 0 \right\}$$

とする。

次に $g_0 \in H^{m-2}(\Omega)$、$g_0 \in H^{m-2}(\Omega)$, $G \subset \mathbb{L}^2(S)$ に対し

$$Aw_0 = g_0 \text{ in } \Omega, \quad B_\Gamma w_0 \in G$$

が成りたつとき、w_0 は (g_0, G) に対する (1) の holdable state といい、又、

$$-\kappa\Delta\theta_0 = g_0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \theta_0 = 0 \quad \text{on } S$$

の解 θ_0 に対し、w_0 が

$$-Aw_0 + \alpha \,\mathrm{grad}\,\theta_0 = f_0 \ \text{in } \Omega, \quad B_\Gamma w_0 \in G$$

をみたすとき、w_0 は (f_0, g_0, G) に対する (2) の holdable state という。

制御の制限集合 $\mathcal{F}_N^m(G)$ に対し、許容可制御性は以下の様に定義される。

定義. D_0、D_1 を $H^m(\Omega)\times H^{m-1}(\Omega)$ の部分集合とする。任意の $[u_0, v_0]\in D_0$, $[u_1, v_1]\in D_1$ に対し、$\mathcal{F}_N^m(G)$ の中に制御 $f(t)$ が存在し、制御系 (1) に対し、この $f(t)$ が $[u_0, v_0]$ をある時刻 T で $[u_1, v_1]$ に移すとき、D_0 は D_1 に $\mathcal{F}_N^m(G)$ で許容可制御であると言う。特に $D_0 = D_1 = D$ のとき、D は $\mathcal{F}_N^m(G)$ で許容可制御と言う。

制御系 (2) についての許容可制御性も同様に定義される。

ここで、(1)、(2) に対する許容可制御性の定理を述べる前に注意しておかねばならないことは、制御に制限が入った時、到達可能集合にも自ずと制限が入るということである。即ち、制御系 (1) において $[u_0, v_0]$ が $[u_1, v_1]$ に制御 $f(t)$ で時刻 T において移されたとすると、適合条件

$$B_\Gamma u_0 = f(0)\ , \quad B_\Gamma u_1 = f(T)$$

がみたされなければならないが、もし、 $f(t) \in \mathfrak{F}_N^m(G)$ ならば $u_0,\ u_1$ は、$B_\Gamma u_0 \in G$、$B_\Gamma u_1 \in G$ でなければならない。従って

$$M_\Gamma^m(G) \equiv \left\{ [u_0, v_0] \in H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega) \ \middle|\ B_\Gamma u_0 \in G \right\}$$

とおくと、 $\mathfrak{F}_N^m(G)$ で許容可制御な初期、最終値は共に $M_\Gamma^m(G)$ に入らねばならない。

制御系 (2) についても同様で、

$$\mathcal{M}_\Gamma^m(G) \equiv \left\{ [u_0, v_0, \theta_0] \in \overline{W}^m_{g,g}(\Omega) \ \middle|\ B_\Gamma u_0 \in G \right\}$$

とおく。

このとき次の $\mathfrak{F}_N^m(G)$ での許容可制御性の定理が得られる。

定理3. 定理1の仮定はみたされているとする。更に、G は $H^{m-3/2}(S)$ の中で開かつ連結であり、ある $g_0 \in H^{m-1}(\Omega)$ が存在し、

$$g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} g_0 \quad \text{in } H^{m-1}(\Omega)$$

とする。

このとき、(g_0, G) に対する (1) の任意の holdable state w_0 に対し $M_\Gamma^m(G)$ は $[w_0, 0]$ に $\mathfrak{F}_N^m(G)$ で許容可制御である。

$g(t)$ が g_0 に収束し、制御系 (1) が、時間 t について対称で

あることに注意すれば、定理3の仮定の下で、(g_0, G) に対するholdable stateが存在すれば、$M_\Gamma^m(G)$ は $\mathcal{F}_N^m(G)$ で許容可制御であることが容易にわかる。

制御系(2)に対しては、

定理4. $m=2$ 又は3とし、定理2の仮定はみたされているとする。更に G は $H^{m-3/2}(S)$ で開、連結であり、ある $g_0 \in H^{m-1}(\Omega)$、$\dot{g}_0 \in H^{m-1}(\Omega)$ が存在し次の仮定をみたすとする。

(i) $g(t)-g_0 \in W^{m-1,1}(0,\infty;L^2(\Omega))$, $\dot{g}(t)-\dot{g}_0 \in W^{m-1,1}(0,\infty;L^2(\Omega))$.

(ii) $m=2$ のとき、

$$\|g(t)-g_0\| + \|\dot{g}(t)-\dot{g}_0\| \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$$

(iii) $m=3$ のとき、

$$\|g_t(t)\| + \|\dot{g}_t(t)\| + \|g(t)-g_0\|_1 + \|\dot{g}(t)-\dot{g}_0\|_2 \to 0 \quad (t\to\infty)。$$

このとき、λ, μ, Ω にのみ依存する $\bar{d}_m>0$ が存在し、もし、$\omega_m(\alpha,\beta,K) \leqq \bar{d}_m$ ならば、$(g_0, \dot{g}_0, G)$ に対する任意のholdable state w_0 に対し、$\mathcal{M}_\Gamma^m(G)$ は $[w_0, 0]$ に $\mathcal{F}_N^m(G)$ で許容可制御である。

定理3、4の証明はここでは行わない。定理3の証明は[1]定理4については[2]を見て欲しい。

定理3、4どちらの場合も制限Gと外力g（あるいはg, g）に対し、holdable stateが存在するかどうかが問題であるが、それはそれぞれの与えられた問題に応じて確かめなければならない。そこで、次の節で例を挙げてそれをみる。

5. 例（境界を小さな力で押す場合）

定理3、4の応用例として、"境界を小さな力で押すだけ"でその振動が制御可能か？という問題を考えることにする。

力の大きさの制限を$\eta > 0$とすると、まず、

(5.1) $\quad |f(t)| < \eta$

なる制限が入り、"押す"ということより、

(5.2) $\quad f(t)\cdot\nu < 0$

であり、表面のマサツ係数をγ $(0<\gamma<1)$とすると、fの表面に対する接平面方向（マサツによって加えることのできる力）がfの法線成分のγ倍で押えられるということより、

(5.3) $\quad |f(t) - f(t)\cdot\nu| < \gamma\, |f(t)\cdot\nu|$

なる制限が入る。この3つの制限(5.1)、(5.2)、(5.3)を考えたものが、"境界を小さな力で押す"ということを表わしている。従って、これをまとめて、

$$G_{\eta,\gamma} = \left\{ h \in H^{m-3/2}(S) \,\middle|\, |h| < \eta,\ h\cdot\nu < -(1+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}|h|, \text{a.a}\right.$$

とおき、$\mathcal{F}_N^m(G_{\eta,\gamma})$ を考える。空間次元 $n=3$ のとき、$m=3$ととると、ソボレフの埋蔵定理より $G_{\eta,\gamma}$ は $H^{3/2}(S)$ で開、連結部分集合となる。更に、

$$(5.4) \qquad \left|\int_\Omega g_0(x)\,dx\right|, \quad \left|\int_\Omega \{x_i g_{0j}(x) - x_j g_{0i}(x)\}\,dx\right| \qquad (1\leq i<j\leq 3)$$

が η に比べ十分小ならば、$(g_0, G_{\eta,\gamma})$ に対する制御系(1)の holdable state が存在することが示され、この場合、定理3が適用可能となる。又、この条件だけで、任意の $g_0\in H^2(\Omega)$ に対して、$(g_0, g_0, G_{\eta,\gamma})$ に対する制御系(2)の holdable state が存在することが示され、定理4が適用可能となる。このことについても、詳しくは、[1],[2] をみて欲しい。

6. 注意.

i) ここでは等方弾性体を考えたが、定理1、3の結果は一般の線型弾性体、即ち、

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j,k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{kl}(u)\right) = g_i & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \displaystyle\sum_{j,k,l=1}^{n}\nu_j\, C_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{kl}(u) = f_i & \text{on } S\times(0,\infty) \end{cases}$$

(ここで、$\varepsilon_{kl}(u)=\frac{1}{2}(\partial u_k/\partial x_l + \partial u_l/\partial x_k)$ であり、C_{ijkl} は真に正定値テンソルである。)

についてはどうか？

ii) 定理２、４において、いずれも $\omega_m(\alpha,\beta,\kappa)$ が十分小さいという条件が付いたが、これは、実際の弾性体の数値を入れてみると、余りにもきつい条件であることがわかる。何とかこの条件を取り除くことはできないだろうか。α、β を止めて κ について考えると、κ が大きい場合が定理２、４だが、$\kappa=0$ とした場合は制御系(2)は制御系(1)において λ、μ のかわりに λ、$\mu+\alpha\beta$ と思ったものに等しくなり、結果は正しい。しかし、κ は小さいが、０でない場合にはわからない。

iii) 制御系(2)において θ に対する境界条件はディリクレとしたが、ノイマン境界条件とすると、その境界条件は

$$\begin{cases} B_\Gamma u + \alpha\nu\cdot\theta = f \\ \partial\theta/\partial\nu = 0 \end{cases} \qquad \text{on } S\times(0,\infty)$$

となる。この境界条件の下で定理２は成りたつか。不等式(3.3)に相当するものが得られない為、ここの方法ではわからない。

参考文献

[1] K. Narukawa: Boundary value control of isotropic elastodynamic systems with constrained controls, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[2] ———— : Boundary value control of thermoelastic systems, to appear in Hiroshima Math. J.